

Homomorphietypen

Wie immer bei Abbildungen sind auch für die Homomorphismen die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv von besonderem Interesse. Hier haben sich eigene Sprechweisen etabliert:

Definition (Abbildungseigenschaften von Homomorphismen)

Ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ heißt

- (1) ein *Monomorphismus*, falls φ injektiv ist,
- (2) ein *Epimorphismus*, falls φ surjektiv ist,
- (3) ein *Isomorphismus*, falls φ bijektiv ist.

Zwei Strukturen A und B heißen *isomorph*, in Zeichen $A \cong B$, falls es einen Isomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ gibt. Wir schreiben auch $\varphi : A \cong B$, falls φ ein Isomorphismus zwischen den Strukturen A und B ist.

Sind zwei Strukturen isomorph, so unterscheiden sie sich nur in den Namen ihrer Elemente. Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus, so geht die Struktur A in die Struktur B über, wenn wir jedes Element a von A in $\varphi(a)$ umbenennen. Damit stimmen die Strukturen in allen Eigenschaften überein, die sich mit Hilfe der Operationen, Relationen und Konstanten formulieren lassen. Sind zum Beispiel A und B isomorphe Gruppen, so ist A genau dann Abelsch, wenn B dies ist. Sind zwei Ringe isomorph, so ist der eine genau dann nullteilerfrei, wenn der andere dies ist. Sind zwei partielle Ordnungen isomorph, so sind beide Ordnungen linear oder beide Ordnungen nicht linear, usw.

Ein Homomorphismus kann eine Struktur in sich selbst abbilden. Für diesen Spezialfall gibt es zwei weitere Sprechweisen:

Definition (Endomorphismus, Automorphismen)

Ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow A$ von einer Struktur A in sich selbst heißt ein *Endomorphismus*. Ist φ zudem bijektiv (d. h. ein Isomorphismus), so heißt φ ein *Automorphismus*.

Ein Endomorphismus muss eine Struktur homomorph in sich selbst abbilden. Die bloße Übereinstimmung der Träger genügt nicht. Der Ordnungsisomorphismus $\varphi : (\mathbb{Z}, <) \rightarrow (\mathbb{Z}, >)$ mit $\varphi(a) = -a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist kein Endomorphismus.

Auch für Homomorphismen verwenden wir unsere liberalen Sprechweisen. Wir schreiben zum Beispiel: „Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus.“ statt: „Sei $\varphi : (G, \circ, e) \rightarrow (G', \circ', e')$ ein Gruppen-Homomorphismus.“ Zudem bezeichnen wir die Operationen, Relationen und Konstanten auf beiden Seiten eines Homomorphismus oft gleich, obwohl sie in der Regel verschieden sind.

Beispiele für das Quintett „Mono, Epi, Iso, Endo, Auto“ werden wir im weiteren Verlauf kennenlernen.

Gruppen-Homomorphismen

Wir betrachten nun Homomorphismen zwischen Gruppen genauer. Die erste Beobachtung ist:

Satz (*automatischer Erhalt des neutralen Elements*)

Seien (G, \circ, e) , (G', \circ', e') Gruppen, und sei $\varphi : G \rightarrow G'$ derart, dass

$$\forall a, b \in G \quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ' \varphi(b).$$

Dann gilt $\varphi(e) = e'$, sodass φ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Beweis

Da φ die Gruppenoperation respektiert, gilt

$$\varphi(e) = \varphi(e \circ e) = \varphi(e) \circ' \varphi(e).$$

Nach der Kürzungsregel in G' ist also $\varphi(e) = e'$.

Analog zeigen wir:

Satz (*Erhalt von Inversen*)

Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \quad \text{für alle } a \in G.$$

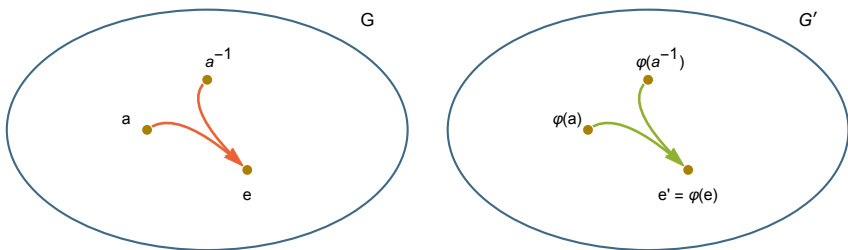
Beweis

Sei $a \in G$, und sei $b = a^{-1}$. Dann gilt

$$\varphi(e) = \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ' \varphi(b).$$

Damit ist $\varphi(b)$ invers zu $\varphi(a)$ in G' , sodass

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(b) = \varphi(a)^{-1}.$$



Wir können also zuerst das Inverse von a in G bilden und es dann mit φ nach G' transportieren. Oder wir können zuerst a mit φ nach G' schicken und dann in G' das Inverse von $\varphi(a)$ bilden. Beide Wege sind äquivalent.