$B^*_i \;=\; (B_i \;\cup\; \bigcup_{j \le k,\, g(j) = i} C_j) \;-\; \mathrm{int}(T).$

Dann sind alle B^*_i abgeschlossen und nach Konstruktion und Wahl der C_i ist $\bigcap_{i \le n} B^*_i = \emptyset$ (!).

Wir nutzen nun aus, dass f(x) ein Randelement von B ist, und verteilen die entfernte Menge int(T) durch eine Projektion neu:

Wegen $f(x) \in \mathrm{bd}(B)$ existiert ein $z \in \mathrm{int}(T)$ mit $z \notin B$.
Für $y \in \mathrm{bd}(T)$ sei $s(z, y) = \{ \lambda y + (1 - \lambda) z \mid 0 \le \lambda \le 1 \}$.
Wir setzen dann für $i \le n$:

$B'_i \;=\; (B^*_i \;\cup\; \bigcup_{y \in \mathrm{bd}(T),\, y \in B^*_i} s(z, y)) \;\cap\; B.$

Dann ist $B'_0, \ldots, B'_n$ wie gewünscht.

Sei dann $A'_i = f^{-1}{}'' B'_i$ für alle $i \le n$, wobei $B'_0, \ldots, B'_n$ wie in (✤).
Dann ist jedes A'_i abgeschlossen und nach Konstruktion gilt:

(i) $\bigcup_{i \le n} A'_i \;=\; S$,

(ii) $\bigcap_{i \le n} A'_i \;=\; \emptyset$,

(iii) $A'_i - U_\delta(x) \;=\; A_i - U_\delta(x)$ für alle $i \le n$.

Wegen (iii) gilt immer noch (##) aus dem Schnittsatz für $A'_0, \ldots, A'_n$.
Also ist $\bigcap_{i \le n} A'_i \neq \emptyset$ nach dem Schnittsatz, *im Widerspruch* zu (ii).

Das Projektionsargument im letzten Teil des Beweises von (✤) findet sich bereits bei [Lebesgue 1911]. Lebesgue hatte aber übersehen, dass zuerst der Rand von T neu verteilt werden muss. Obiger Beweis folgt der Darstellung [Sperner 1928].

Ein topologischer Dimensionsbegriff

In der Topologie entwickelte sich durch Arbeiten von Brouwer, Urysohn, Menger, Čech, Lebesgue und anderen eine allgemeine Dimensionstheorie. Die sog. *Menger-Urysohn-Dimension* $\mathrm{ind}(\mathscr{X})$ ist für alle regulären Hausdorff-Räume (siehe Anhang 4) $\mathscr{X}$ wie folgt definiert:

(i) $\mathrm{ind}(\langle \emptyset, \emptyset \rangle) \;=\; -1$,

(ii) $\mathrm{ind}(\langle X, \mathscr{U} \rangle) \;=\;$ „das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit:
für alle $x \in X$ und alle $U \in \mathscr{U}$ mit $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit:
$x \in V$, $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$ und $\mathrm{ind}(\langle \mathrm{bd}(V), \mathscr{U} | \mathrm{bd}(V) \rangle) < n$“.

Man kann zeigen, dass unter dieser Definition $\mathrm{ind}(\mathbb{R}^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Die Definition ist weiter auch konsistent mit unserer früheren Definition von „nulldimensional“, da offene und zugleich abgeschlossene Mengen einen leeren Rand haben.
Zur Geschichte der Dimensionsproblematik siehe [Katetov / Simon 1997] und [Crilly 1999]. Die ersten mathematischen Versuche zur Fassung des Dimensionsbegriffs finden sich sich – einmal mehr – bei Bolzano.

Literatur

Brouwer, Luitzen 1911 *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl.* Mathematische Annalen 70, S. 161 – 165.

– 1911 *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets.* Mathematische Annalen 71 (1911), S. 305 – 313.

– 1912 *Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets.* Mathematische Annalen 72 (1912), S. 55 – 56.

– 1976 *Collected Works.* Band 2. Hrsg. H. Freudenthal. North-Holland, Amsterdam.

Crilly, Tony 1999 *The emergence of topological dimension theory.* In: James (Hrsg.), History of Topology, S. 1 – 24. Elesevier, Amsterdam.

Dugundji, James 1966 *Topology.* Allyn and Bacon, Boston.

Engelking, Ryszard 1978 *Dimension Theory.* North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, David 1891 *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.* Mathematische Annalen 38 (1891), S. 459 – 460.

Istrăţescu, Vasile 1981 *Fixed Point Theorems.* Reidel, Dordrecht.

Katetov, Miroslav / Simon, Petr 1997 *Origins of dimension theory.* In: C. E. Aull / R. Lowen (Hrsg.): Handbook of the History of General Topology, Volume 1, S. 113 – 134. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kechris, Alexander 1995 *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics 156, Springer, New York.

Knaster, Bronisław / Kuratowski, Kazimierz / Mazurkiewicz, Stefan 1929 *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe.* Fundamenta Mathematicae 14 (1929), S. 132 – 137.

Lebesgue, Henry 1911 *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des escapes à n et n + p dimensions.* Mathematische Annalen 70 (1911), S. 166 – 168.

– 1921 *Sur les correspondances entre les points de deux espaces.* Fundamenta Mathematicae 2 (1921), S. 256 – 285.

Lüroth, Jakob 1906 *Über Abbildung [sic!] von Mannigfaltigkeiten.* Mathematische Annalen 63, S. 222 – 238.

Menger, Karl 1923 *Über die Dimensionalität von Punktmengen I.* Monatshefte für Mathematik und Physik 33 (1923), S. 148 – 160.

Moschovakis, Yiannis 1980 *Descriptive Set Theory.* North-Holland, Amsterdam.

Peano, Giuseppe 1890 *Sur une courbe qui remplit une aire plane.* Mathematische Annalen 36 (1890), S. 157 – 160.

Sierpiński, Wacław 1929 *Sur les images continues et biunivoques de l'ensemble de tous les nombres irrationnels.* Mathematica 1 (1929), S. 18 – 21.

Smart, D. R. 1974 *Fixed Point Theorems.* Cambridge University Press, Cambridge.